МЕТОД ПОДСТАНОВКИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ.

Сюткина Светлана Михайловна
Преподаватель математики высшей категории 1-го академического лицея Ташкентского государственного экономического университета,
город Ташкент, Узбекистан

Аннотация. В данной статье рассматривается метод подстановки для решения функциональных уравнений, приводятся примеры.
Ключевые слова: функциональное уравнение, решение функционального уравнения, метод замены переменных.

Уравнение – одно из важнейших понятий алгебры. Решение многих практических задач сводится к решению уравнений. Умение решать уравнения различных видов, в том числе функциональные уравнения необходимо учащимся для подготовки к выпускным, вступительным экзаменам, а также для подготовки к математическим олимпиадам.

Функциональное уравнение – это уравнение, которое содержит одну или несколько неизвестных функций (с заданными областями определения и значений).

Функция $f(x)$ называется решением данного функционального уравнения, если она удовлетворяет ему при всех значениях аргумента в области её определения.

Решить функциональное уравнение – это, значит, найти все функции, которые тождественно ему удовлетворяют.

Функциональные уравнения возникают в самых различных областях математики, обычно в тех случаях, когда требуется описать все функции, обладающие заданными свойствами. Термин функциональное уравнение обычно используется для уравнений, несводимых простыми способами к алгебраическим уравнениям. Эта несводимость чаще всего обусловлена тем, что аргументами неизвестной функции в уравнении являются не сами независимые переменные, а некоторые данные функции от них.

Простейшими примерами функциональных уравнений могут служить: $f(x) = f(-x)$ – уравнение чётности, $f(-x) = -f(x)$ – уравнение нечётности, $f(x + \mathrm{T}) = f(x)$ – уравнение периодичности и др.

Основным методом решения функциональных уравнений является метод замены переменной или метод подстановки.

Заменяя некоторые переменные функционального уравнения либо конкретными значениями, либо какими-либо другими выражениями пытаемся либо упростить это уравнение, либо привести его к такому виду, что дальнейшее решение станет очевидным. Особенность применяемого метода как раз и состоит в том, что в ряде случаев он позволяет отыскать решения в классе всевозможных функций.

Рассмотрим метод на следующем примере.

Пример 1. Найдите все функции, определённые на множестве $(-\infty; 1) \cup (1; \infty)$, удовлетворяющие соотношению $(\mathrm{x}-1) \cdot f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - f(x) = x$.

Решение:

Пусть $\frac{x+1}{x-1} = t$. Выразим из этого равенства x через t:

$$x + 1 = tx - t, \quad tx - x = t + 1, \quad x(t-1) = t + 1, \qquad x = \frac{t+1}{t-1}$$

Тогда функциональное уравнение примет вид:

$$\left(\frac{t+1}{t-1} - 1\right) \cdot f(t) - f\left(\frac{t+1}{t-1}\right) = \frac{t+1}{t-1}$$

Отсюда $\frac{2}{t-1} \cdot f(t) - f\left(\frac{t+1}{t-1}\right) = \frac{t+1}{t-1}$

В последнем уравнении вернемся к переменной x вместо t:

$\frac{2}{x-1} \cdot f(x) - f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{x+1}{x-1}$.

Объединим данное уравнение и полученное в систему:

$$\begin{cases} (\mathrm{x}-1) \cdot f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - f(x) = x & (1) \\ \frac{2}{x-1} \cdot f(x) - f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{x+1}{x-1} & (2) \end{cases}$$

Из уравнения (1) выразим $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ и подставим в уравнение (2):

$$f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{f(x) + x}{\mathrm{x} - 1}$$

$$\frac{2}{x-1} \cdot f(x) - \frac{f(x) + x}{\mathrm{x} - 1} = \frac{x+1}{x-1}$$

Отсюда $f(x)\left(\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x-1}\right) = \frac{x}{x-1} + \frac{x+1}{x-1}$; $\quad f(x)\left(\frac{1}{x-1}\right) = \frac{2x+1}{x-1}$;

$f(x) = 2x + 1$.

Проверим, действительно ли функция $f(x)$ удовлетворяет данному уравнению: $(\mathrm{x}-1) \cdot \left(2 \cdot \frac{x+1}{x-1} + 1\right) - 2x - 1 = x$;

$2x + 2 + x - 1 - 2x - 1 = x$; $\quad x = x$ – верно.

Ответ: $f(x) = 2x + 1$.

Пример 2. Найти функцию, удовлетворяющую уравнению

$$f\left(\frac{x+1}{x-2}\right) + 2f\left(\frac{x-2}{x+1}\right) = x$$

Решение:

1) Пусть $\frac{x-2}{x+1} = z$, отсюда $x = \frac{z+2}{1-z}$ $(z \neq 0, z \neq 1)$.

2) Подставим в исходное уравнение, получим

$$f\left(\frac{1}{z}\right) + 2f(z) = \frac{z+2}{1-z} \qquad (3)$$

3) Пусть $\frac{1}{z} = t$, тогда $z = \frac{1}{t}$. Сделаем замену в уравнении (3), получим:

$$f(z)+2f\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{\frac{1}{z}+2}{1-\frac{1}{z}} \quad \text{или} \quad f(z)+2f\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{1+2z}{z-1} \qquad (4)$$

4) Рассмотрим систему из уравнений (3) и (4):

$$\begin{cases} f\left(\dfrac{1}{z}\right)+2f(z)=\dfrac{z+2}{1-z} & (3)\\ f(z)+2f\left(\dfrac{1}{z}\right)=\dfrac{1+2z}{z-1} & (4)\end{cases}$$

Для нахождения функции $f(z)$ обе части уравнения (3) умножим на (-2) и сложим с уравнением (4):

$$\begin{cases} -2f\left(\frac{1}{z}\right)-4f(z)=\frac{-2z-4}{1-z}\\ f(z)+2f\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{1+2z}{z-1}\end{cases}; \quad -3f(z)=\frac{2z+4+1+2z}{z-1}; \quad -3f(z)=\frac{4z+5}{z-1};$$

$f(z)=\frac{4z+5}{3-3z}$, значит $f(x)=\frac{4x+5}{3-3x}$.

Ответ: $f(x)=\frac{4x+5}{3-3x}$.

Сущность метода, использованного при решении задачи, заключается в следующем. Предполагаем, что уравнение имеет решение. Применяем к переменным, входящим в функциональное уравнение, некоторые подстановки. Получаем систему уравнений, одним из неизвестных которой является искомая функция. После решения системы непосредственной проверкой необходимо убедиться, что найденная функция удовлетворяет условиям задачи. Метод подстановки является мощным инструментом для решения функциональных уравнений, особенно когда другие методы не применимы или слишком сложны. Однако важно уметь правильно выбирать подстановки и проводить упрощения, чтобы успешно применить этот метод к решаемой задаче.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА:

1. Нестандартные задачи по математике. Алгебра: Учеб. пособие для учащихся 7-11 кл. Челябинск: «Взгляд», 2004.
2. Постановление президента Республики Узбекистан от 7 мая 2020 года № ПП-4708 «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики».
3. «О дополнительных мерах по повышению качества образования в высших образовательных учреждениях и обеспечению их активного участия в осуществляемых в стране широкомасштабных реформах» от 5 июня 2018 года № ПП3775.