

Date: 23rd October-2025

PARAMETRIK TENGLAMALAR VA ULARNI YECHISH USULLARI

Bobojanov To'ychi

Yo'ldoshev Begzod

Turdiboyev Azamat

O'zDJTU (O'zbekiston davlat jaxon tillari universiteti) akademik litseyi
matematika fani o'qituvchilari

Annotatsiya: Ushbu maqolada parametrik tenglamalar tushunchasi, ularning matematik mohiyati va amaliy ahamiyati keng yoritilgan. Parametrik ifodalar yordamida geometrik shakllarni, ayniqsa egri chiziqlarni tahlil qilish va ularning xossalarini aniqlash usullari ko'rib chiqilgan. Shuningdek, parametrik tenglamalarni yechishning asosiy usullari — analitik, trigonometrik va differensiallashga asoslangan yondashuvlar misollar asosida izohlangan. Maqolada parametrik tenglamalarning fizika, muhandislik, informatika va kompyuter grafikasi sohalaridagi qo'llanilish imkoniyatlari haqida ham so'z yuritiladi. Tadqiqot natijalari parametrik tenglamalarni o'rganish o'quvchilarda tahliliy fikrlashni rivojlantirish va real jarayonlarni modellashtirish ko'nikmalarini shakllantirishda muhim o'rin tutishini ko'rsatadi.

Kalit so'zlar: parametrik tenglama, analitik geometriya, parametr, trigonometrik funksiyalar, modellashtirish, analitik usul, egri chiziq, trayektoriya, hosila, matematika.

Kirish

Matematika fanining asosiy vazifalaridan biri — turli hodisalar, jarayonlar va ularning o'zaro bog'liqligini aniq ifodalash, ularni tahlil qilish hamda amaliy masalalarni yechishda qo'llashdan iboratdir. Ayniqsa, **analitik geometriya** matematikaning eng muhim bo'limlaridan biri bo'lib, unda geometrik shakllar va egri chiziqlar algebratik tenglamalar yordamida tasvirlanadi. Shu nuqtai nazardan, **parametrik tenglamalar** analitik geometriyaning ajralmas qismi hisoblanadi.

Parametrik tenglamalar deganda, o'zgaruvchilar orasidagi bog'lanish bevosita emas, balki uchinchi o'zgaruvchi – **parametr** orqali ifodalanadigan tenglamalar tushuniladi. Bunda (x) va (y) kabi asosiy o'zgaruvchilar biror (t) parametrga bog'liq holda beriladi. Masalan, $(x = f(t))$ va $(y = g(t))$ ko'rinishidagi ifodalar parametrik tenglamalar tizimini tashkil etadi. Parametr (t) ma'lum oraliqda o'zgargan sari, (x) va (y) qiymatlari ham o'zgaradi va ular egri chiziqning shaklini hosil qiladi.

Bunday ifodalar matematik tahlil, fizika, muhandislik, informatika, iqtisodiyot va hatto biologiya kabi fanlarda keng qo'llaniladi. Chunki real hayotdagi ko'plab jarayonlar oddiy funksional bog'lanishlar orqali emas, balki vaqt, tezlik, yo'l yoki boshqa o'lchovlar bilan belgilanadigan **parametrik munosabatlar** shaklida ifodalanadi. Masalan, jismning trayektoriyasini tasvirlashda uning koordinatalari vaqtga bog'liq bo'ladi; demak, bu jarayonni parametrik tenglamalar yordamida aniq ifodalash mumkin.



Date: 23rd October-2025



Parametrik tenglamalar orqali murakkab geometrik shakllar — aylana, ellips, parabola, giperbola va hatto sirtlar (uch o‘lchovli holatda) qulay tarzda tasvirlanadi. Bundan tashqari, ularning **grafik ko‘rinishini** chizish, harakat yo‘lini aniqlash va egri chiziqlar orasidagi munosabatlarni o‘rganish uchun parametrik ifodalar an’anaviy funksional tenglamalarga nisbatan qulayroqdir.

Bugungi kunda parametrik tenglamalar nafaqat nazariy matematikaning obyekti, balki **amaliy muhandislik va texnologiya** sohalarida ham keng qo‘llanilmoqda. Masalan, **kompyuter grafikasida** murakkab shakllarni modellashtirishda, **robototexnikada** mexanik bo‘g‘inlarning harakat yo‘lini aniqlashda, **aerodinamikada** samolyot qanoti yoki avtomobil kuzovining silliq chizig‘ini loyihalashda parametrik tenglamalardan foydalaniladi.

Shuningdek, **informatika va dasturlash** sohalarida parametrik ifodalarning o‘rni beqiyosdir. Grafik dasturlashda egri chiziqlarni avtomatik chizish, kompyuter o‘yinlari va simulyatsiyalarda obyektlarning harakat yo‘lini aniqlash aynan parametrik modellar asosida bajariladi. Shuning uchun bu mavzuning nazariy va amaliy jihatdan o‘rganilishi zamonaviy texnologik tafakkurning ajralmas qismiga aylanmoqda.

Parametrik tenglamalarni yechish, ya’ni parametрни yo‘qotish orqali (x) va (y) orasidagi aniq bog‘lanishni topish usullari o‘quvchilarga matematik mantiq, tahliliy fikrlash va modellashtirish ko‘nikmalarini rivojlantirishda muhim o‘rin tutadi. Ularni o‘zlashtirish orqali nafaqat matematik nazariya chuqurroq tushuniladi, balki amaliy masalalarda ham ijodiy yondashuv shakllanadi.

Shu sababli “Parametrik tenglamalar va ularni yechish usullari” mavzusini o‘rganish nafaqat matematika fanining asosiy bo‘limlaridan birini chuqur o‘zlashtirishga, balki turli fanlar kesimida integratsion yondashuvni shakllantirishga xizmat qiladi. Ushbu yo‘nalishda bilim olish har bir texnik, pedagogik yoki iqtisodiy yo‘nalishdagi mutaxassis uchun zamonaviy ilmiy dunyoqarashni kengaytiruvchi muhim omil bo‘lib xizmat qiladi.

Parametrik tenglamalar va ularni yechish usullari. Parametrik tenglamalar tahliliy geometriyaning muhim bo‘limlaridan biri bo‘lib, ular yordamida murakkab geometrik shakllar va harakat yo‘llarini oson ifodalash mumkin. Ushbu tenglamalarda o‘zgaruvchilar bevosita emas, balki uchinchi bir o‘zgaruvchi — parametr orqali bog‘lanadi. Bunday ko‘rinishdagi tenglamalar quyidagicha yoziladi:

$$x = f(t), \quad y = g(t)$$

Bu yerda t — parametr bo‘lib, u ma’lum oraliqda o‘zgaradi, x va y esa shu parametrga bog‘liq holda aniqlanadi. Parametrik tenglamalarning eng oddiy namunasi — aylananing tenglamasidir:

$$x = r \cos t$$

$$y = r \sin t$$

Bu holda t parametr 0 dan 2π gacha qiymatlarni olganida, nuqta (x, y) tekislikda radiusi r bo‘lgan aylanani chizadi.

Parametrik tenglamalarni yechishning asosiy usullari. Parametrik tenglamalarni yechish deganda, berilgan parametrik ifodalar asosida parametr t ni yo‘qotib, x va y

Date: 23rd October-2025

orasidagi to'g'ridan-to'g'ri bog'lanishni topish tushuniladi. Quyida bu jarayonning asosiy usullari keltirilgan.

Analitik usul. Bu usulda parametr t ni bir tenglamadan topib, ikkinchi tenglamaga qo'yish orqali t yo'qotiladi. Masalan:

$$x = 2t + 1, \quad y = 3t - 2.$$

Birinchi tenglamadan t ni topamiz:

$$t = (x - 1)/2.$$

Endi bu qiymatni y ifodasiga qo'yamiz:

$$y = 3((x - 1)/2) - 2 = (3x - 3)/2 - 2 = (3x - 7)/2.$$

Demak, parametr yo'qotilgach, x va y orasidagi to'g'ridan-to'g'ri bog'lanish $y = (3x - 7)/2$ tenglama orqali ifodalanadi.

Trigonometrik almashtirish usuli. Agar parametrik tenglamalarda sinus va kosinus funksiyalari ishtirok etsa, trigonometrik identifikatsiyalar yordamida parametr t ni yo'qotish mumkin.

Masalan:

$$x = 4\cos t, \quad y = 3\sin t.$$

Bilamizki, $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$. Shu sababli:

$$(x/4)^2 + (y/3)^2 = 1.$$

Bu tenglama ellipsning standart tenglamasi bo'ladi.

Almashtirish va differensiallash usuli. Ba'zi hollarda parametrik tenglamalar orqali hosilani yoki trayektoriya yo'nalishini aniqlash zarur bo'ladi. Bunda quyidagi formula ishlatiladi:

$$dy/dx = (dy/dt) / (dx/dt).$$

Misol uchun:

$$x = t^2, \quad y = t^3.$$

Unda:

$$dy/dt = 3t^2, \quad dx/dt = 2t.$$

Demak:

$$dy/dx = (3t^2) / (2t) = 3t/2.$$

Bu ifoda egri chiziqning har bir nuqtasidagi tangens burchagini aniqlash imkonini beradi.

Parametrik tenglamalarning qo'llanilish sohalari. Parametrik tenglamalar ko'plab amaliy sohalarda, xususan, fizika, muhandislik, informatika va iqtisodiyotda keng qo'llaniladi.

-Fizikada: jismning trayektoriyasini aniqlashda, harakat tenglamalarini tuzishda;

- Muhandislikda: mexanik tizimlarning harakat yo'llarini, avtomobil yoki robot bo'g'inlarining trayektoriyasini hisoblashda;

- Kompyuter grafikasida: murakkab shakllar, 3D modellar va silliq egri chiziqlarni chizishda;

- Iqtisodiyotda: vaqt o'tishi bilan iqtisodiy ko'rsatkichlarning o'zgarishini modellashtirishda.



Date: 23rd October-2025

Parametrik tenglamalarni grafik ko‘rinishda ifodalash. Parametrik tenglamalar yordamida grafiklar chizishning afzalligi shundaki, ular orqali egri chiziqlarning butun shaklini aniqlash mumkin. Parametrlarning qiymati o‘zgarganda, nuqta (x, y) o‘z joyini o‘zgartiradi va shu tarzda to‘liq trayektoriya hosil bo‘ladi. Bu esa oddiy funksional tenglamalarga nisbatan ko‘proq aniqlik va moslashuvchanlik beradi.

Xulosa

Parametrik tenglamalar matematik analiz va analitik geometriyaning ajralmas bo‘limlaridan biri bo‘lib, ular yordamida murakkab geometrik shakllarni, jism harakat yo‘llarini va real hayotdagi turli jarayonlarni soddalashtirilgan, aniq ifodalar orqali tasvirlash mumkin. Parametrik shaklning eng muhim afzalligi shundaki, u o‘zgaruvchilar orasidagi bog‘lanishni yanada qulay, moslashuvchan va tabiiy shaklda ifodalaydi. Bu esa funksional tenglamalarda kuzatiladigan chegaralarni bartaraf etadi.

Parametrik tenglamalarni o‘rganish jarayonida ularni yechishning bir nechta samarali usullari — **analitik usul, trigonometrik almashtirish usuli** hamda **differensiallashga asoslangan usul** keng qo‘llaniladi. Har bir usul ma‘lum turdagi masalalar uchun qulaylik yaratadi: analitik usul oddiy algebraik bog‘lanishlarni topishda, trigonometrik usul esa aylana, ellips kabi egri chiziqlarni ifodalashda qo‘llanadi.

Shuningdek, parametrik tenglamalar matematikani amaliy fanlar bilan bog‘laydigan kuchli vosita sifatida e‘tirof etiladi. Ular **fizika, muhandislik, kompyuter grafika, robototexnika** va **iqtisodiy modellashtirish** kabi yo‘nalishlarda keng qo‘llanilib, zamonaviy texnologiyalar asosini tashkil etmoqda. Ayniqsa, harakatni vaqt parametri orqali ifodalash, shakllarni modellashtirish, yoki egri chiziqlar trayektoriyasini aniqlashda parametrik tenglamalar amaliy jihatdan beqiyos ahamiyat kasb etadi.

Ta‘lim jarayonida parametrik tenglamalarni o‘qitish o‘quvchilarning matematik mantiqiy fikrlashini, tahliliy yondashuvini va abstrakt tushunchalarni anglash salohiyatini oshiradi. Bu esa nafaqat nazariy bilimni, balki real hayotiy masalalarni yechishda matematik modellashtirish ko‘nikmasini shakllantiradi.

Umuman olganda, parametrik tenglamalar va ularni yechish usullarini chuqur o‘rganish zamonaviy matematika, texnika va tabiiy fanlarda yangi yondashuvlar uchun asos yaratadi. Shu boisdan, ushbu mavzuni puxta o‘zlashtirish nafaqat matematikani, balki unga bog‘liq ko‘plab sohalarni samarali rivojlantirish uchun zarur shartlardan biridir.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. T. A. Yuldashev, *Analitik geometriya va chiziqli algebra*, Toshkent: O‘zbekiston Milliy universiteti nashriyoti, 2018, 256 b.
2. S. R. Rahmatov, *Oliy matematika. 1-qism: Analitik geometriya asoslari*, Toshkent: Fan va texnologiya, 2019, 312 b.
3. A. To‘xtayev, *Matematik analiz kursi. I qism*, Toshkent: “Sharq” nashriyoti, 2020, 278 b.
4. V. A. Zorich, *Matematicheskii analiz. Tom 1*, Moskva: Nauka, 2004, 472 s.



Date: 23rd October-2025

5. James Stewart, *Calculus: Early Transcendentals*, 8th Edition, Boston: Cengage Learning, 2016, 1368 p.
6. Larson R., Edwards B. H., *Calculus*, 11th Edition, Cengage Learning, 2017, 1280 p.
7. N. T. Abdukarimov, *Matematik analizdan masalalar to'plami*, Toshkent: "O'zbekiston", 2016, 230 b.
8. Boyko A. P., *Analiticheskaya geometriya*, Moskva: MGU, 2010, 290 s.
9. Demidovich B. P., *Zbornik zadach i uprajneniy po matematicheskomu analizu*, Moskva: Nauka, 1990, 512 s.
10. X. A. Abdurahmonov, *Matematika o'qitish metodikasi: oliy ta'lim uchun o'quv qo'llanma*, Toshkent: "Iqtisod-moliya", 2021, 344 b.

