

Date: 11th December-2025

CHIZIQLI TENGLAMALAR SISTEMASI

Isroilova Zahro, Erkinova Shahrizoda

Shahrisabz davlat pedagogika instituti pedagogika fakulteti matematika yo'nalishi
2-kurs talabalari

Ilmiy rahbar: **Turayev Ziyavutdin**

Annotatsiya: Ushbu maqolada chiziqli tenglamalar sistemasi va uni yechishning eng samarali algebraik usullari chuqur tahlil qilinadi. Chiziqli sistemalarning tuzilishi, noma'lumlar va koeffitsiyentlar o'rtasidagi bog'liqlik, shuningdek yechimning mavjud yoki yagona bo'lishiga ta'sir etuvchi omillar izchil yoritiladi. Maqolada an'anaviy qo'yish va yo'qotish usullaridan tashqari, murakkab va ko'p o'zgaruvchili sistemalarida keng qo'llaniladigan zamonaviy metodlar ham ko'rib chiqiladi. Ayniqsa, Gauss usulining satrlar bo'yicha ketma-ket soddalashtirish orqali sistemasni qulay ko'rinishga keltirilishi hamda undan noma'lumlarni izchil topish jarayoni batafsil yoritiladi. Shuningdek, Krammer qoidasi yordamida determinantlar asosida yechimni aniq va nazariy jihatdan ishonchli aniqlash imkoniyatlari tushuntiriladi. Maqola chiziqli tenglamalar sistemasining algebra va matematik modellashdagi o'rni, shuningdek uning iqtisodiyot, fizik jarayonlar, texnika va kompyuter fanlaridagi muhim qo'llanilishlarini yoritish orqali mavzuning ahamiyatini ochib beradi.

Kalit so'zlar: Chiziqli tenglamalar sistemasi, algebra, noma'lumlar, koeffitsiyentlar, Gauss usuli, qo'yish usuli, algebraik model, yechim mavjudligi, yagona yechim, cheksiz yechim, matematik modellashdagi.

Аннотация: В данной статье представлен углубленный анализ системы линейных уравнений и наиболее эффективных алгебраических методов ее решения. Последовательно рассматриваются структура линейных систем, взаимосвязь между неизвестными и коэффициентами, а также факторы, влияющие на существование или единственность решения. Помимо традиционных методов подстановки и исключения, в статье также рассматриваются современные методы, широко используемые в комплексных и многомерных системах. В частности подробно рассматривается процесс упрощения системы путем последовательного построчного упрощения методом Гаусса и последовательного нахождения неизвестных из него. Также объясняются возможности точного и теоретически достоверного определения решения на основе определителей с использованием правила Крамера. Статья раскрывает важность темы подчеркивая роль системы линейных уравнений в алгебре и математическом моделировании а также ее важные приложения в экономике физических процессах технике и информатике.

Ключевые слова: Система линейных уравнений, алгебра, неизвестные, коэффициенты, метод Гаусса, метод подстановки, алгебраическая модель, существование решения, единственное решения, бесконечное решение, математическое моделирование.



$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)^T, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad (3)$$

Unda, matritsalarini ko'paytirish amalidan foydalanib, (1) sistemani ixcham va qulay bo'lgan quyidagi matritsaviy ko'rinishda yozish mumkin:

$$AX=B \quad (4)$$

Matritsa usuli. Bu usulda sistemaning matritsaviy ko'rinishda yozilgan (4) ifodasidan foydalaniladi. Bunda $r(A)=n$ shartdan sistemaning n -tartibli A kvadrat matritsasi maxsusmas ekanligi kelib chiqadi, chunki matritsa rangi ta'rifiga $\Delta|A| \neq 0$ bo'ladi. Bu holda A matritsaga teskari matritsa A^{-1} mavjud va (4) matritsaviy tenglamaning ikkala tomonini unga chap tomondan ko'paytirish mumkin. Natijada teskari matritsa ta'rifi va birlik matritsa xossasidan foydalanib, ushbu formulani hosil etamiz:

$$AX=B \rightarrow A^{-1}AX=A^{-1}B \rightarrow EX=A^{-1}B \rightarrow X=A^{-1}B \quad (7)$$

(4) matritsaviy ko'rinishdagi n noma'lumli chiziqli n ta tenglamalar sistemasi yechimini ifodalovchi (7) formula bir noma'lumli $ax=b(a \neq 0)$ chiziqli tenglamaning yechimini determinant $x=b/a=a^{-1}b$ formulaga o'xshash ekanligidan ta'kidlab o'tamiz.

Misol: Ushbu tenglamalar sistemasini matritsa usulida yeching:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 20 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -11 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9 \end{cases}$$

Yechish: Dastlab sistemaning A matritsasini yozib, uning determinantini hisoblaymiz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \Delta = |A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 43 \neq 0$$

Demak A matritsa maxsusmas, unga teskari matritsa mavjud va uni formula orqali topamiz:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{43} \begin{pmatrix} 16 & 17 & -10 \\ -17 & -10 & 16 \\ 10 & -16 & 17 \end{pmatrix}$$

Endi (7) formula bo'yicha noma'lumlardan tuzilgan X ustun matritsani aniqlaymiz:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1}B = \frac{1}{43} \begin{pmatrix} 16 & 17 & -10 \\ -17 & -10 & 16 \\ 10 & -16 & 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ -11 \\ 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{43} \begin{pmatrix} 43 \\ -86 \\ 129 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Demak, sistemaning yagona yechimi $x_1=1$, $x_2=-2$, $x_3=3$ bo'ladi.

Shunday qilib matritsalar usuli har qanday n noma'lumli n ta tenglamaning aniq sistema yechimini oddiy va ixcham ko'rinishidagi (7) formula bilan ifodalash imkonini beradi. Bu formula nazariy tadqiqotlar uchun qulaydir, ammo n oshib borishi bilan uning amaliy tatbiqi murakkablashib boradi. Bunga sabab shuki, bu holda A^{-1} teskari matritsani topish uchun yuqori tartibli determinantlarini hisoblashga to'g'ri keladi.

Asosiy qismi: Kramer(determinantlar) usuli. Matritsaviy ko'rinishda (7) formula bilan ifodalanuvchi (1) Sistema ($n=m$) yechimini teskari matritsa formulasidan foydalanib, quyidagicha yozamiz.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1}B = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{i1} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{i2} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1k} & A_{2k} & \dots & A_{ik} & \dots & A_{nk} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{in} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} b_1 A_{11} + b_2 A_{21} + \dots + b_n A_{n1} \\ b_1 A_{12} + b_2 A_{22} + \dots + b_n A_{n2} \\ \dots \\ b_1 A_{1k} + b_2 A_{2k} + \dots + b_n A_{nk} \\ \dots \\ b_1 A_{1n} + b_2 A_{2n} + \dots + b_n A_{nn} \end{pmatrix}$$

Bu yerda sistemaning $x_k(k=1,2,\dots,n)$ yechimi uchun ushbu formulalar kelib chiqadi:

$$x_k = \frac{1}{\Delta} (b_1 A_{1k} + b_2 A_{2k} + \dots + b_n A_{nk}) = \frac{1}{\Delta} \Delta_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}, \quad k=1,2,\dots,n) \quad (8)$$

Bunda determinantning 11-xossasidan foydalanib, $k=1,2,\dots,n$, uchun ushbu

$$b_1 A_{1k} + b_2 A_{2k} + \dots + b_n A_{nk} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k-1} & b_1 & a_{1k+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2k-1} & b_2 & a_{2k+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ik-1} & b_i & a_{ik+1} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk-1} & b_n & a_{nk+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta_k$$

Tengliklar o'rinli bo'lishidan foydalandik. (8) formulalarda (1) sistemaning a_{ij} koeffitsiyentlaridan tuzilgan



Date: 11th December-2025

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} \quad \text{determinant sistemaning asosiy determinanti,}$$

uning k-ustunini ozod hadlar ustuni B bilan almashtirishdan hosil bo'lgan $\Delta_k (k = 1, 2, \dots, n)$ determinantlar esa **yordamchi determinantlar** deyiladi.

Ta'rif: (1) chiziqli tenglamalar sistemasining yechimini asosiy va yordamchi determinantlar orqali ifodalovchi (8) tengliklar **Kramer formulalari** deb ataladi.

Kramer formulalarini $n=2$ hol uchun yozamiz. Bunda (1) chiziqli tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

asosiy va yordamchi determinantlar

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{12} & b_2 \end{vmatrix}$$

va Kramer formulalari $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$ ko'rinishda bo'ladi.

Shunga o'xshash $n=3$ bo'lganda sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

asosiy va yordamchi determinantlar

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Va Kramer formulalari

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \quad \text{ko'rinishda bo'ladi.}$$

Misol: Ushbu uch noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasini Kramer usulida yeching:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Yechish: Asosiy va yordamchi determinantlarni hosil etamiz va hisoblaymiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 18$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 5$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -1$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 7$$

Kramer formulalariga asosan Sistema yechimini topamiz:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{5}{18}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{1}{18}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{7}{18}$$

Ta'rif: Agar ikkita chiziqli tenglamalar sistemalarining yechimlar to'plami o'zaro teng bo'lsa, ular **ekvivalent (teng kuchli) sistemalar** deyiladi.

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 = -23 \\ x_1 + 2x_2 = 8 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$$

Ta’rif: Agar (1) sistemaning ikkita tenglamalar o’rni o’zaro almashtirilsa yoki ulardan biri ixtiyoriy λ songa ko’paytirib boshqa bir tenglamasiga qo’shilsa, natijada berilgan sistemaga ekvivalent sistema hosil bo’ladi.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = -3 \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Sistemaning ikkinchi va uchinchi tenglamalarini o'rnini almashtirish va hosil bo'lgan sistemaning birinchi tenglamasini $\lambda=-2$ songa ko'paytirib, uchinchi tenglamasiga qo'shish natijasida hosil bo'lgan quyidagi Sistema berilgan sistemaga ekvivalent bo'ladi.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ -11x_1 + 4x_2 = -5 \end{cases}$$

Haqiqatdan ham bu sistemalarni Kramer yoki matritsalar usulida yechib, ularning ikkalasini ham bir xil

$$x_1 = -\frac{11}{63}, \quad x_2 = \frac{25}{63}, \quad x_3 = -\frac{10}{63},$$

Yechimga ega ekanligiga ishonch hosil qilish mumkin.

Endi birgalikda va aniq bo'lgan quyidagi n noma'lumli n ta chiziqli tenglamalar sistemasini Gauss usulida yechishga o'tamiz:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + a_{k3}x_3 + \dots + a_{kn}x_n = b_k \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (9)$$

1-qadam. (9) sistemada $a_{11} \neq 0$ deb olish mumkin, chunki bus hart bajarilmagan bo'lsa, (9) sistemadagi tenglamalar o'rnini almashtirish orqali unga erishish mumkin. Sistemaning 1-tenglamasini ikkala tomonini $-a_{k1}/a_{11}$ songa ko'paytirib, uning k-tenglamasiga ($k=2,3, \dots, n$) qo'shamiz. Natijada hosil bo'ladigan ekvivalent sistemaning k-tenglamasida noma'lum x_1 qatnashmaydi va u quyidagi ko'rinishda bo'ladi:



$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \dots\dots\dots \\ a_{k2}^{(1)}x_2 + a_{k3}^{(1)}x_3 + \dots + a_{kn}^{(1)}x_n = b_k^{(1)} \\ \dots\dots\dots \\ a_{n2}^{(1)}x_2 + a_{n3}^{(1)}x_3 + \dots + a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)} \end{array} \right. \quad (9^{(1)})$$

2-qadam. Hosil bo'lgan $(9^{(1)})$ sistemada yuqoridagi singari yana $a_{22}^{(1)} \neq 0$ deb olish mumkin. Bu sistemaning 2-tenglamasini ikkala tomonini $-a_{k2}^{(1)}/a_{22}^{(1)}$ songa ko'paytirib, uning k-tenglamasiga ($k=3,4, \dots, n$) qo'shamiz. Natijada hosil bo'ladigan ekvivalent sistemaning k-tenglamasida noma'lum x_2

Qatnashmaydi va u quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ a_{33}^{(2)}x_3 + \dots + a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)} \\ a_{43}^{(2)}x_3 + \dots + a_{4n}^{(2)}x_n = b_4^{(2)} \\ \dots\dots\dots \\ a_{n3}^{(2)}x_3 + \dots + a_{nn}^{(2)}x_n = b_n^{(2)} \end{array} \right. \quad (9^{(2)})$$

n-qadam. Yuqoridagi jarayonni ketma-ket $n-1$ marta takrorlab, quyidagi ko'rinishdagi ekvivalent sistemaga kelimiz:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ a_{33}^{(2)}x_3 + \dots + a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)} \\ a_{44}^{(3)}x_4 + \dots + a_{4n}^{(3)}x_n = b_4^{(3)} \\ \dots\dots\dots \\ a_{nn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)} \end{array} \right. \quad (9^{(n-1)})$$

Bu **Gauss usulining to'g'ri yo'li**, uning natijasida hosil bo'lgan $(9^{(n-1)})$ sistema **uchburchakli** deyiladi.

Endi $(9^{(n-1)})$ sistemaning oxirgi tenglamasidan x_n noma'lumning qiymati topamiz. So'ngra x_n qiymati $(9^{(n-1)})$ yoki $(9^{(n-2)})$ sistemaning oxirgidan oldingi tenglamasiga qo'yib, undan x_{n-1} noma'lumning qiymati aniqlaymiz. Shunday tarzda davom etib, birin-ketin $x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_2, x_1$ noma'lumlar qiymatlarini topamiz. Bu jarayonga **Gauss usulining teskari yo'li** deyiladi.

Gauss usulining matritsalar va Kramer usullaridan afzalliklari quyidagilardan iborat:

Bu usul yuqori tartibli determinantlarni hisoblashni talab etmaydi va faqat arifmetik amallar orqali bajariladi;

Bu usulni deyarli yuqorida ko'rsatilgan ko'rinishda amalga oshirib, ixtiyoriy chiziqli tenglamalar sistemasini, jumladan noaniq sistemalarni ham yechish mumkin:

Date: 11th December-2025

Bu usul soda hisoblash algoritmiga ega bo'lib, uni kompyuterda amalga oshirish oson.

Misol: Ushbu sistemani Gauss usulida yeching.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 20 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -11 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9 \end{cases}$$

Yechish: Bu sistemadan noma'lumlarni birin-ketin yo'qotamiz.

1-qadam. Sistemaning ikkinchi va uchinchi tenglamalardan x_1 noma'lumni yo'qotamiz. Kasr songa kelmaslik va bu orqali hisoblashlarni soddalashtirish maqsadida buni quyidagicha amalga oshiramiz. Dastlab 1-tenglamani ikkala tomonini -3 soniga, 2-tenglamani esa 2 soniga ko'paytirib, ularni o'zaro qo'shamiz. So'ngra 1-tenglamani ikkala tomonini -2 soniga ko'paytirib, hosil bo'lgan tenglamani 3 -tenglamaga qo'shamiz. Natijada quyidagi ekvivalent sistemaga kelamiz.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 20 \\ 17x_2 - 16x_3 = -82 \\ 8x_2 - 5x_3 = -31 \end{cases}$$

2-qadam. Oldingi qadamda hosil qilingan sistemaning 2-tenglamasini -8 soniga, 3-tenglamasini 17 soniga ko'paytirib o'zaro qo'shamiz:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 20 \\ 17x_2 - 16x_3 = -82 \\ 43x_3 = 129 \end{cases}$$

Dastlab bu uchburchakli sistemani 3 -tenglamasidan $x_3=3$ ekanligini topamiz.

So'ngra bu natijani sistemaning 2 - tenglamaga qo'yib undan $x_2=-2$ ekanligini aniqlaymiz. Yakuniy qadamda $x_2=-2$ va $x_3=3$ natijalarni sistemaning 1 -tenglamaga qo'yib, undan $x_1=1$ ekanligini topamiz. Demak berilgan sistemaning yagona yechimi $x_1=1, x_2=-2, x_3=3$ ekan.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. Буда́к Б. М., Фо́мин С. В. Курс высшей математики. — Москва: Наука, 1983. (O'rtacha qiymat teoremlari va ularning isbotlari bayoni mavjud.)
2. Демидович Б.П. Курс дифференциального и интегрального исчисления. — Москва: Наука, 1990. (Roll, Lagrange va Cauchy teoremlariga bag'ishlangan maxsus boblar mavjud.)
3. Фихтенго́льц Г.М. Основы математического анализа, т. 1. — Москва: Физматлит, 2001. (Teoremlar chuqur isbotlar bilan keltirilgan mashhur manba.)
4. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ, т. 1. — Москва: Физматлит, 2006. (O'rtacha qiymat teoremlari, shartlar va geometrik talqinlar keng yoritilgan.)
5. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление, т. 1. — Москва: Наука, 1985. (Ta'riflar, shartlar, misollar va qo'llanmalar mavjud.)

Date: 11th December-2025

6. James Stewart. Calculus. 8th Edition — Cengage Learning, 2016.
(Lagrange Mean Value Theorem, Rolle's Theorem, Cauchy's Theorem sodda va tushunarli bayon.)
7. Tom M. Apostol. Mathematical Analysis. 2nd Edition. Addison-Wesley, 1974.
(O'rtacha qiymat teoremlari matematik jihatdan aniq va qat'iy ko'rinishda berilgan.)
8. Robert G. Bartle, Donald R. Sherbert. Introduction to Real Analysis. 4th Edition. Wiley, 2011.
(Teoremlar va ularning isbotlari aniq, tushunarli tilda bayon qilingan.)
9. Яглом И.М., Болтянский В.Г. Конкурсные задачи по математике. — Москва: Наука, 1985.
(Mean value teoremlari asosida yechiladigan qiziqarli masalalar berilgan.)
10. Mirzayev U., Mamatov A. Matematik analiz. Toshkent: O'zbekiston milliy universiteti nashriyoti.
(O'zbek tilidagi o'rta va oliy ta'lim uchun darslik; teoremlarning bayoni mavjud.)

